Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

С1

а) Решите уравнение $\dfrac{5\cos x+4}{4\operatorname{tg}x-3}=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-4\pi;-\dfrac{5\pi}{2}\right]$.

Решение.
а) Решим уравнение:

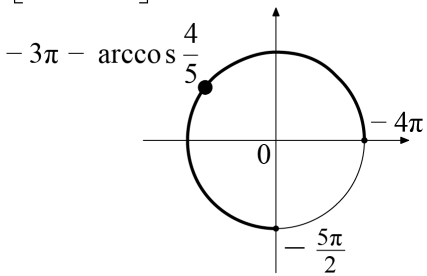
$$\begin{cases}\cos x=-\dfrac{4}{5},\\ \operatorname{tg}x\ne\dfrac{3}{4}.\end{cases}$$

Из уравнения $\cos x=-\dfrac{4}{5}$ получаем

$$x=\pi-\arccos\frac{4}{5}+2\pi n \quad \text{или} \quad x=\pi+\arccos\frac{4}{5}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.$$

Неравенству $\operatorname{tg}x\ne\dfrac{3}{4}$ удовлетворяет серия $x=\pi-\arccos\dfrac{4}{5}+2\pi n$.

б) При помощи тригонометрической окружности отберём корни уравнения, лежащие на отрезке $\left[-4\pi;-\dfrac{5\pi}{2}\right]$. Получим $x=-3\pi-\arccos\dfrac{4}{5}$.



Ответ: а) $\pi-\arccos\dfrac{4}{5}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; б) $-3\pi-\arccos\dfrac{4}{5}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах.	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б*. ИЛИ Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

С2

В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с основанием ABC боковое ребро равно 5, а сторона основания равна 6. Найдите расстояние от вершины A до плоскости SBC.

Решение.
Пусть SO – высота пирамиды. Тогда

$$AO=\frac{AB}{\sqrt{3}}=2\sqrt{3},\quad SO=\sqrt{SA^2-AO^2}=\sqrt{25-12}=\sqrt{13}.$$

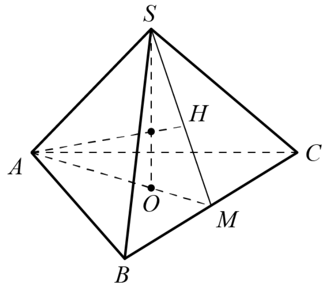
Пусть V – объём пирамиды, тогда $V=\dfrac{1}{3}\cdot SO\cdot\dfrac{AB^2\sqrt{3}}{4}=3\sqrt{39}$.

С другой стороны, $V=\dfrac{1}{3}\cdot h\cdot S_{SBC}$, где h – искомое расстояние.

В треугольнике SBC высота SM равна $\sqrt{SB^2-MB^2}=\sqrt{25-9}=4$.

Площадь треугольника SBC равна $S_{SBC}=\dfrac{1}{2}\cdot SM\cdot BC=12$. Получаем, что

$$h=\frac{3V}{S_{SBC}}=\frac{9\sqrt{39}}{12}=\frac{3\sqrt{39}}{4}.$$



Ответ: $\dfrac{3\sqrt{39}}{4}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ.	2
Решение содержит обоснованный переход к планиметрической задаче, но получен неверный ответ или решение не закончено. ИЛИ При правильном ответе решение недостаточно обосновано.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

С3 Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \dfrac{x^5-x^2}{x^2} \ge \dfrac{x^3-1}{4x^2}, \\ \left|2x^2+\dfrac{19}{8}x-\dfrac{1}{8}\right| \ge 3x^2+\dfrac{1}{8}x-\dfrac{19}{8}. \end{cases}$$

Решение.

Решим первое неравенство системы:

$$\frac{x^5-x^2}{x^2} \ge \frac{x^3-1}{4x^2}; \quad \frac{\left(x^3-1\right)\left(4x^2-1\right)}{x^2} \ge 0; \quad \frac{(x-1)(2x-1)(2x+1)}{x^2} \ge 0,$$

откуда $-0{,}5 \le x < 0$, $0 < x \le 0{,}5$ или $x \ge 1$.

Второе неравенство равносильно совокупности:

$$\left[\begin{array}{l} 2x^2+\dfrac{19}{8}x-\dfrac{1}{8} \ge 3x^2+\dfrac{1}{8}x-\dfrac{19}{8}, \\ -2x^2-\dfrac{19}{8}x+\dfrac{1}{8} \ge 3x^2+\dfrac{1}{8}x-\dfrac{19}{8}; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x^2-\dfrac{9}{4}x-\dfrac{9}{4} \le 0, \\ x^2+\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{2} \le 0; \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} (x-3)\left(x+\dfrac{3}{4}\right) \le 0, \\ (x+1)\left(x-\dfrac{1}{2}\right) \le 0, \end{array}\right. \text{ откуда } -1 \le x \le 3.$$

Решение системы: $-0{,}5 \le x < 0$; $0 < x \le 0{,}5$; $1 \le x \le 3$.

Ответ: $[-0{,}5;0)$; $(0;\ 0{,}5]$; $[1;\ 3]$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ.	3
Обоснованно получены верные ответы в обоих неравенствах.	2
Обоснованно получен верный ответ в одном неравенстве исходной системы. ИЛИ Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	3

С4 На диагонали параллелограмма взяли точку, отличную от её середины. Из неё на все стороны параллелограмма (или их продолжения) опустили перпендикуляры.

а) Докажите, что четырёхугольник, образованный основаниями этих перпендикуляров, является трапецией.

б) Найдите площадь полученной трапеции, если площадь параллелограмма равна 16, а один из его углов равен $60°$.

Решение.

а) Возьмём на диагонали AC параллелограмма $ABCD$ точку O (не посередине) и проведём через неё перпендикуляры NL и KM к сторонам параллелограмма (см. рис.). Прямоугольные треугольники CKO и AMO подобны. Точно так же подобны треугольники CNO и ALO:

$$OK:OM = OC:OA = ON:OL.$$

Отсюда следует подобие треугольников ONK и OLM. Тогда накрест лежащие углы OML и OKN равны, а поэтому прямые NK и ML параллельны. Следовательно, четырёхугольник $KLMN$ – параллелограмм или трапеция.

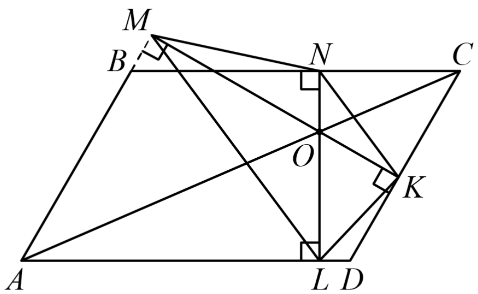
Докажем, что это трапеция. Если $KLMN$ – параллелограмм, то $ON = OL$. В этом случае $OC = OA$, то есть O – середина AC. Противоречие. Значит, $KLMN$ – трапеция.

б) Обозначим площадь параллелограмма S, а его острый угол – α. Угол между диагоналями NL и KM трапеции $KLMN$ равен углу между перпендикулярными диагоналям прямыми BC и CD, то есть этот угол равен α. Поэтому площадь трапеции равна:

$$\frac{1}{2}\cdot NL\cdot KM\cdot\sin\alpha = \frac{1}{2}\cdot\frac{S}{AD}\cdot\frac{S}{AB}\cdot\sin\alpha = \frac{S\cdot AD\cdot AB\cdot\sin^2\alpha}{2\cdot AD\cdot AB} = \frac{S\sin^2\alpha}{2}.$$

Подставляя $\alpha = 60°$ и $S = 16$, получаем, что площадь трапеции равна

$$\frac{16\sin^2 60°}{2} = \frac{16\cdot 3}{8} = 6.$$



Ответ: 6.

Содержание критерия	**Баллы**
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*.	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б*. ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки.	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*. ИЛИ При обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки. ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	3

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

С1

а) Решите уравнение $\dfrac{5\operatorname{tg} x-12}{13\cos x-5}=0$.

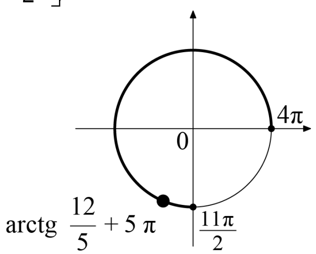
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[4\pi; \dfrac{11\pi}{2}\right]$.

Решение.
а) Решим уравнение:

$$\begin{cases}\operatorname{tg} x=\dfrac{12}{5},\\ \cos x\neq\dfrac{5}{13}.\end{cases}$$

Из уравнения $\operatorname{tg} x=\dfrac{12}{5}$ получаем $x=\operatorname{arctg}\dfrac{12}{5}+\pi n, n\in\mathbb{Z}$. Неравенству $\cos x\neq\dfrac{5}{13}$ удовлетворяют корни, изображаемые точками третьей четверти единичной окружности: $x=\operatorname{arctg}\dfrac{12}{5}+\pi+2\pi n, n\in Z$.

б) При помощи тригонометрической окружности отберём корни уравнения, лежащие на отрезке $\left[4\pi; \dfrac{11\pi}{2}\right]$. Получим $x=5\pi+\operatorname{arctg}\dfrac{12}{5}$.



Ответ: а) $\operatorname{arctg}\dfrac{12}{5}+\pi+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; б) $5\pi+\operatorname{arctg}\dfrac{12}{5}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах.	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б*. ИЛИ Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

С2 В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с основанием ABC боковое ребро равно 3, а сторона основания равна 2. Найдите расстояние от вершины A до плоскости SBC.

Решение.
Пусть SO – высота пирамиды. Тогда

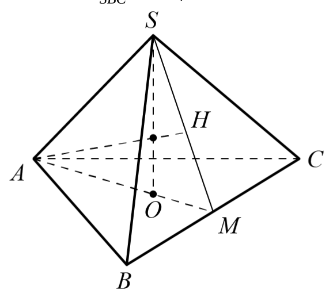
$$AO=\frac{AB}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3},\quad SO=\sqrt{SA^2-AO^2}=\sqrt{9-\frac{4}{3}}=\frac{\sqrt{69}}{3}.$$

Пусть V – объём пирамиды, тогда $V=\dfrac{1}{3}\cdot SO\cdot\dfrac{AB^2\sqrt{3}}{4}=\dfrac{\sqrt{23}}{3}$. С другой стороны, $V=\dfrac{1}{3}\cdot h\cdot S_{SBC}$, где h – искомое расстояние.

В треугольнике SBC высота SM равна $\sqrt{SB^2-MB^2}=\sqrt{9-1}=2\sqrt{2}$.

Площадь треугольника SBC равна $S_{SBC}=\dfrac{1}{2}\cdot SM\cdot BC=2\sqrt{2}$. Получаем, что

$$h=\frac{3V}{S_{SBC}}=\frac{\sqrt{23}}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{46}}{4}.$$



Ответ: $\dfrac{\sqrt{46}}{4}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ.	2
Решение содержит обоснованный переход к планиметрической задаче, но получен неверный ответ или решение не закончено. ИЛИ При правильном ответе решение недостаточно обосновано.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

С3 Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 4\cdot\dfrac{x^3+x^2}{x^2-2x+1}\le 9\cdot\dfrac{x+1}{x^2-2x+1}, \\ \left|x^2-\dfrac{29}{12}x-\dfrac{35}{12}\right|\ge 2x^2-\dfrac{61}{12}x-\dfrac{19}{12}. \end{cases}$$

Решение.

Решим первое неравенство системы:

$$4\cdot\frac{x^3+x^2}{x^2-2x+1}\le 9\cdot\frac{x+1}{x^2-2x+1};\quad \frac{4x^3+4x^2-9x-9}{(x-1)^2}\le 0;\quad \frac{(x+1)(2x-3)(2x+3)}{(x-1)^2}\le 0,$$

откуда $x\le -1{,}5$, $-1\le x<1$ или $1<x\le 1{,}5$.

Второе неравенство равносильно совокупности:

$$\left[\begin{array}{l} x^2-\dfrac{29}{12}x-\dfrac{35}{12}\ge 2x^2-\dfrac{61}{12}x-\dfrac{19}{12}, \\ -x^2+\dfrac{29}{12}x+\dfrac{35}{12}\ge 2x^2-\dfrac{61}{12}x-\dfrac{19}{12}; \end{array}\right.\quad \left[\begin{array}{l} x^2-\dfrac{8}{3}x+\dfrac{4}{3}\le 0, \\ x^2-\dfrac{5}{2}x-\dfrac{3}{2}\le 0; \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} (x-2)\left(x-\dfrac{2}{3}\right)\le 0, \\ (x-3)\left(x+\dfrac{1}{2}\right)\le 0, \end{array}\right.\quad \text{откуда } -0{,}5\le x\le 3.$$

Решение системы: $-0{,}5\le x<1$ или $1<x\le 1{,}5$.

Ответ: $[-0{,}5;1);(1;1{,}5]$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ.	3
Обоснованно получены верные ответы в обоих неравенствах.	2
Обоснованно получен верный ответ в одном неравенстве исходной системы ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	3

С4 На диагонали параллелограмма взяли точку, отличную от её середины. Из неё на все стороны параллелограмма (или их продолжения) опустили перпендикуляры.

а) Докажите, что четырёхугольник, образованный основаниями этих перпендикуляров, является трапецией.

б) Найдите площадь полученной трапеции, если площадь параллелограмма равна 24, а один из его углов равен $45°$.

Решение.

а) Возьмём на диагонали AC параллелограмма $ABCD$ точку O (не посередине) и проведём через неё перпендикуляры NL и KM к сторонам параллелограмма (см. рис.). Прямоугольные треугольники CKO и AMO подобны. Точно так же подобны треугольники CNO и ALO:

$$OK:OM=OC:OA=ON:OL.$$

Отсюда следует подобие треугольников ONK и OLM. Тогда накрест лежащие углы OML и OKN равны, а поэтому прямые NK и ML параллельны. Следовательно, четырёхугольник $KLMN$ – параллелограмм или трапеция.

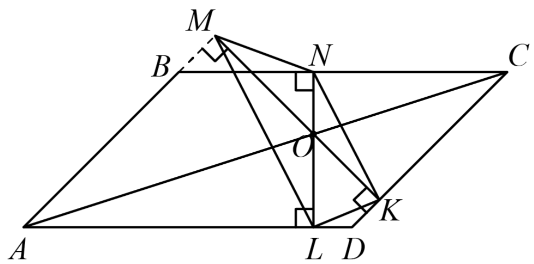
Докажем, что это трапеция. Если $KLMN$ – параллелограмм, то $ON=OL$. В этом случае $OC=OA$, то есть O – середина AC. Противоречие. Значит, $KLMN$ – трапеция.

б) Обозначим площадь параллелограмма S, а его острый угол – α. Угол между диагоналями NL и KM трапеции $KLMN$ равен углу между перпендикулярными диагоналям прямыми BC и CD, то есть этот угол равен α. Поэтому площадь трапеции равна:

$$\frac{1}{2}\cdot NL\cdot KM\cdot\sin\alpha=\frac{1}{2}\cdot\frac{S}{AD}\cdot\frac{S}{AB}\cdot\sin\alpha=\frac{S\cdot AD\cdot AB\cdot\sin^2\alpha}{2\cdot AD\cdot AB}=\frac{S\sin^2\alpha}{2}.$$

Подставляя $\alpha=45°$ и $S=24$, получаем, что площадь трапеции равна

$$\frac{24\sin^2 45°}{2}=\frac{24}{4}=6.$$



Ответ: 6.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*.	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б*. ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки.	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*. ИЛИ При обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки. ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	3

Вариант МА10601

Ответы к заданиям

№ задания	Ответ
B1	19
B2	539
B3	7
B4	18
B5	33
B6	0,25
B7	5
B8	62

№ задания	Ответ
B9	-0,25
B10	54
B11	35
B12	8
B13	13
B14	1
B15	6

Вариант МА10602

Ответы к заданиям

№ задания	Ответ
B1	37
B2	291
B3	4
B4	21
B5	19,5
B6	0,25
B7	4
B8	56

№ задания	Ответ
B9	-0,5
B10	130
B11	34
B12	27
B13	5
B14	3
B15	-3