Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

C1

а) Решите уравнение $7\cdot 9^{x^2-3x+1}+5\cdot 6^{x^2-3x+1}-48\cdot 4^{x^2-3x}=0$.
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-1;2]$.

Решение.
а) Преобразуем уравнение:

$$7\cdot 9^{x^2-3x+1}+5\cdot 6^{x^2-3x+1}-12\cdot 4^{x^2-3x+1}=0;$$

$$7\cdot\left(\frac{9}{4}\right)^{x^2-3x+1}+5\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{x^2-3x+1}-12=0,$$

откуда $\left(\frac{3}{2}\right)^{x^2-3x+1}=1$ или $\left(\frac{3}{2}\right)^{x^2-3x+1}=-\frac{12}{7}$.

У второго уравнения решений нет.

Преобразуем первое уравнение: $x^2-3x+1=0$, откуда $x=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$.

б) Оценим $\sqrt{5}$ снизу и сверху целыми числами: $2<\sqrt{5}<3$. Тогда

$$\frac{5}{2}<\frac{3+\sqrt{5}}{2}<3 \text{ и } 0<\frac{3-\sqrt{5}}{2}<\frac{1}{2}.$$

Значит, отрезку $[-1;2]$ принадлежит только $x=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

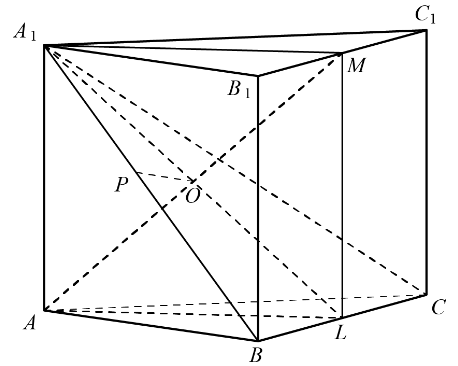
Ответ: а) $\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$; б) $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б* ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

C2

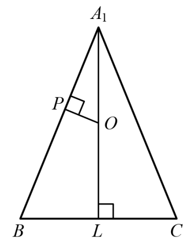
Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, все рёбра основания которой равны $2\sqrt{7}$. Сечение, проходящее через боковое ребро AA_1 и середину M ребра B_1C_1, является квадратом. Найдите расстояние между прямыми A_1B и AM.

Решение.
Пусть данное сечение призмы — квадрат AA_1ML. Тогда его диагонали перпендикулярны: $AM\perp A_1L$, а по теореме о трёх перпендикулярах $AM\perp BC$. Следовательно, $AM\perp A_1BC$. Отсюда следует, что искомым расстоянием между прямыми A_1B и AM является длина перпендикуляра OP, опущенного из точки O пересечения диагоналей квадрата AA_1ML на прямую A_1B, так как $OP\perp A_1B$ и $OP\perp AM$.



Сторона квадрата AA_1ML равна высоте треугольника ABC, то есть $AL=\sqrt{21}$, а его диагональ $A_1L=\sqrt{42}$. В равнобедренном треугольнике A_1BC основание $BC=2\sqrt{7}$, боковая сторона $A_1B=7$. Отсюда, используя подобие треугольников A_1OP и A_1BL, найдём

$$OP=\frac{A_1O\cdot LB}{A_1B}=\frac{A_1L\cdot BC}{4A_1B}=\frac{\sqrt{42}\cdot 2\sqrt{7}}{4\cdot 7}=\frac{\sqrt{6}}{2}.$$



Ответ: $\frac{\sqrt{6}}{2}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит обоснованный переход к планиметрической задаче, но получен неверный ответ или решение не закончено ИЛИ при правильном ответе решение недостаточно обосновано	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

C3 Решите систему неравенств $\begin{cases}\log_{6x^2-x-1}\left(2x^2-5x+3\right)\ge 0,\\ \dfrac{12x^2-31x+14}{4x^2+3x-1}\le 0.\end{cases}$

Решение.

Решим первое неравенство. Рассмотрим два случая.

Первый случай: $0<6x^2-x-1<1$. Тогда имеем систему

$$\begin{cases}6x^2-x-1>0,\\ 6x^2-x-1<1,\\ 2x^2-5x+3>0,\\ 2x^2-5x+3\le 1;\end{cases}\quad \begin{cases}(2x-1)(3x+1)>0,\\ (2x+1)(3x-2)<0,\\ (x-1)(2x-3)>0,\\ (x-2)(2x-1)\le 0.\end{cases}$$

Решением этой системы будет интервал $\left(\frac{1}{2};\frac{2}{3}\right)$.

Второй случай: $6x^2-x-1>1$. Тогда имеем систему

$$\begin{cases}6x^2-x-1>1,\\ 2x^2-5x+3\ge 1;\end{cases}\quad \begin{cases}(2x+1)(3x-2)>0,\\ (x-2)(2x-1)\ge 0.\end{cases}$$

Получаем: $x<-\frac{1}{2}$ или $x\ge 2$.

Решение первого неравенства: $\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2};\frac{2}{3}\right)\cup\left[2;+\infty\right)$.

Решим второе неравенство:

$$\frac{12x^2-31x+14}{4x^2+3x-1}\le 0;\quad \frac{(x-2)(12x-7)}{(x+1)(4x-1)}\le 0.$$

Решение второго неравенства: $\left(-1;\frac{1}{4}\right)\cup\left[\frac{7}{12};2\right]$.

Решением системы является общая часть решений обоих неравенств:

$$\left(-1;-\frac{1}{2}\right)\cup\left[\frac{7}{12};\frac{2}{3}\right)\cup\{2\}.$$

Ответ: $\left(-1;-\frac{1}{2}\right)$; $\left[\frac{7}{12};\frac{2}{3}\right)$; 2.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Обоснованно получены верные ответы в обоих неравенствах	2
Обоснованно получен верный ответ в одном неравенстве исходной системы ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

C4 Биссектриса угла ADC параллелограмма $ABCD$ пересекает прямую AB в точке E. В треугольник ADE вписана окружность, касающаяся стороны AE в точке K и стороны AD в точке T.

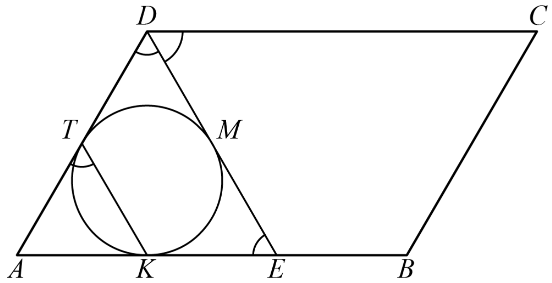
а) Докажите, что прямые KT и DE параллельны.

б) Найдите угол BAD, если известно, что $AD=6$ и $KT=3$.

Решение.

а) Прямые AE и CD параллельны, а DE — биссектриса угла ADC, поэтому $\angle AED=\angle CDE=\angle ADE$. Значит, треугольник ADE равнобедренный, $AD=AE$. Отрезки AK и AT касательных, проведённых к окружности из точки A, равны, значит, треугольник ATK также равнобедренный, причём угол при вершине A у этих треугольников общий. Поэтому $\angle ATK=\angle ADE$. Следовательно, $KT\parallel DE$.

б) Пусть окружность касается основания DE равнобедренного треугольника ADE в точке M. Тогда M — середина DE. Обозначим $DM=x$. Тогда $DT=DM=x$, $AT=AD-DT=6-x$. Треугольник ATK подобен треугольнику ADE, поэтому $\frac{AT}{AD}=\frac{TK}{DE}$, или $\frac{6-x}{6}=\frac{3}{2x}$. Отсюда находим, что $x=3$. Тогда $DE=2x=6$, значит, треугольник ADE равносторонний. Следовательно, $\angle BAD=60^\circ$.



Ответ: $60°$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б* ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* ИЛИ при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

C1

а) Решите уравнение $4^{x^2-2x+1}+4^{x^2-2x}=20$.
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-1;2]$.

Решение.
а) Преобразуем уравнение:

$$4\cdot 4^{x^2-2x}+4^{x^2-2x}=20;\quad 4^{x^2-2x}=4;\quad x^2-2x=1;\quad x^2-2x-1=0,$$

откуда $x=1\pm\sqrt{2}$.
б) Оценим $\sqrt{2}$ снизу и сверху целыми числами: $1<\sqrt{2}<2$. Тогда

$$2<1+\sqrt{2}<3 \text{ и } -1<1-\sqrt{2}<0.$$

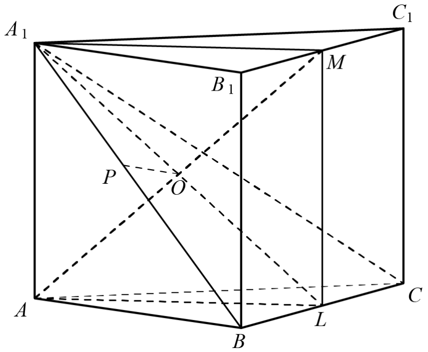
Значит, отрезку $[-1;2]$ принадлежит только $x=1-\sqrt{2}$.
Ответ: а) $1\pm\sqrt{2}$; б) $1-\sqrt{2}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б* ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

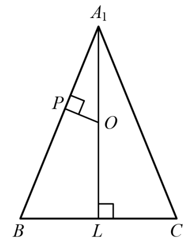
C2

Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, все рёбра основания которой равны 2. Сечение, проходящее через боковое ребро AA_1 и середину M ребра B_1C_1, является квадратом. Найдите расстояние между прямыми A_1B и AM.

Решение.
Пусть данное сечение призмы — квадрат AA_1ML. Тогда его диагонали перпендикулярны: $AM\perp A_1L$, а по теореме о трёх перпендикулярах $AM\perp BC$. Следовательно, $AM\perp A_1BC$. Отсюда следует, что искомым расстоянием между прямыми A_1B и AM является длина перпендикуляра OP, опущенного из точки O пересечения диагоналей квадрата AA_1ML на прямую A_1B, так как $OP\perp A_1B$ и $OP\perp AM$.



Сторона квадрата AA_1ML равна высоте треугольника ABC, то есть $AL=\sqrt{3}$, а его диагональ $A_1L=\sqrt{6}$. В равнобедренном треугольнике A_1BC основание $BC=2$, боковая сторона $A_1B=\sqrt{7}$. Отсюда, используя подобие треугольников A_1OP и A_1BL, найдём $OP=\dfrac{A_1O\cdot LB}{A_1B}=\dfrac{A_1L\cdot LB}{2A_1B}=\dfrac{\sqrt{6}}{2\sqrt{7}}$.



Ответ: $\dfrac{\sqrt{6}}{2\sqrt{7}}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит обоснованный переход к планиметрической задаче, но получен неверный ответ или решение не закончено ИЛИ при правильном ответе решение недостаточно обосновано	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

C3

Решите систему неравенств $\begin{cases} \log_{6x^2+5x}\left(2x^2-3x+1\right)\ge 0, \\ \dfrac{20x^2-32x+3}{3x^2+7x+2}\le 0. \end{cases}$

Решение.

Решим первое неравенство. Рассмотрим два случая.

Первый случай: $0<6x^2+5x<1$. Тогда имеем систему

$$\begin{cases} 6x^2+5x>0, \\ 6x^2+5x<1, \\ 2x^2-3x+1>0, \\ 2x^2-3x+1\le 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x(6x+5)>0, \\ (x+1)(6x-1)<0, \\ (x-1)(2x-1)>0, \\ x(2x-3)\le 0. \end{cases}$$

Решением этой системы будет интервал $\left(0;\dfrac{1}{6}\right)$.

Второй случай: $6x^2+5x>1$. Тогда имеем систему

$$\begin{cases} 6x^2+5x>1, \\ 2x^2-3x+1\ge 1; \end{cases} \quad \begin{cases} (x+1)(6x-1)>0, \\ x(2x-3)\ge 0. \end{cases}$$

Получаем: $x<-1$ или $x\ge\dfrac{3}{2}$.

Решение первого неравенства: $(-\infty;-1)\cup\left(0;\dfrac{1}{6}\right)\cup\left[\dfrac{3}{2};+\infty\right)$.

Решим второе неравенство:

$$\frac{20x^2-32x+3}{3x^2+7x+2}\le 0;\quad \frac{(2x-3)(10x-1)}{(x+2)(3x+1)}\le 0.$$

Решение второго неравенства: $\left(-2;-\dfrac{1}{3}\right)\cup\left[\dfrac{1}{10};\dfrac{3}{2}\right]$.

Решением системы является общая часть решений обоих неравенств:

$$(-2;-1)\cup\left[\frac{1}{10};\frac{1}{6}\right)\cup\left\{\frac{3}{2}\right\}.$$

Ответ: $(-2;-1)$; $\left[\dfrac{1}{10};\dfrac{1}{6}\right)$; $\left\{\dfrac{3}{2}\right\}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Обоснованно получены верные ответы в обоих неравенствах	2
Обоснованно получен верный ответ в одном неравенстве исходной системы ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

C4

Биссектриса угла ADC параллелограмма $ABCD$ пересекает прямую AB в точке E. В треугольник ADE вписана окружность, касающаяся стороны AE в точке K и стороны AD в точке T.

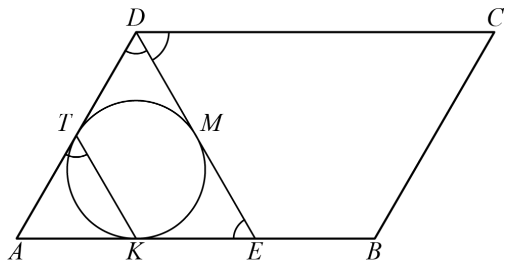
а) Докажите, что прямые KT и DE параллельны.

б) Найдите угол BAD, если известно, что сторона $AD=8$ и $KT=4$.

Решение.

а) Прямые AE и CD параллельны, а DE — биссектриса угла ADC, поэтому $\angle AED=\angle CDE=\angle ADE$. Значит, треугольник ADE равнобедренный, $AD=AE$. Отрезки AK и AT касательных, проведённых к окружности из точки A, равны, значит, треугольник ATK также равнобедренный, причём угол при вершине A у этих треугольников общий. Поэтому $\angle ATK=\angle ADE$. Следовательно, $KT\parallel DE$.

б) Пусть окружность касается основания DE равнобедренного треугольника ADE в точке M. Тогда M — середина DE. Обозначим $DM=x$. Тогда $DT=DM=x$, $AT=AD-DT=8-x$. Треугольник ATK подобен треугольнику ADE, поэтому $\dfrac{AT}{AD}=\dfrac{TK}{DE}$, или $\dfrac{8-x}{8}=\dfrac{4}{2x}$. Отсюда находим, что $x=4$. Тогда $DE=2x=8$, значит, треугольник ADE равносторонний. Следовательно, $\angle BAD=\angle EAD=60^\circ$.



Ответ: 60°.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б* ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* ИЛИ при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

Вариант МА10201

Ответы к заданиям

№ задания	Ответ
B1	12
B2	7
B3	3
B4	7400
B5	6
B6	0,2
B7	2
B8	2

№ задания	Ответ
B9	2
B10	4
B11	-4
B12	2
B13	12
B14	4
B15	2

Вариант МА10202

Ответы к заданиям

№ задания	Ответ
B1	13
B2	7
B3	6
B4	3700
B5	14
B6	0,1
B7	9
B8	38

№ задания	Ответ
B9	3
B10	7
B11	-6
B12	2
B13	4
B14	4
B15	3